7.4.11 Výpočty vzdáleností III

Př. 1: Urči vzdálenost mimoběžných přímek $p(A;\boldsymbol{u})$ a $q(B;\boldsymbol{v})$, $A[-2;0;1]$, $\boldsymbol{u}=(3;-2;2)$, $B[-1;2;-2]$, $\boldsymbol{v}=(-2;1;-2)$.

$P[-2+3t;-2t;1+2t]$ (leží na přímce p) $Q[-1-2s;2+s;-2-2s]$ (leží na přímce q).

Vektor $Q-P=((-1-2s)-(-2+3t);(2+s)-(-2t);(-2-2s)-(1+2t))$

$Q-P=(1-2s-3t;2+s+2t;-3-2s-2t)$

Vektor $Q-P$ je kolmý na přímku p (a tedy na vektor $\boldsymbol{u}=(3;-2;2)$).

$(Q-P)\cdot\boldsymbol{u}=0$ $(1-2s-3t;2+s+2t;-3-2s-2t)(3;-2;2)=0$

$3(1-2s-3t)-2(2+s+2t)+2(-3-2s-2t)=0$

$12s+17t=-7$

Vektor $Q-P$ je kolmý na přímku q (a tedy na vektor $\boldsymbol{v}=(-2;1;-2)$).

$(Q-P)\cdot\boldsymbol{v}=0$ $(1-2s-3t;2+s+2t;-3-2s-2t)(-2;1;-2)=0$

$-2(1-2s-3t)+1(2+s+2t)-2(-3-2s-2t)=0$

$9s+12t=-6$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{array}{l} 12s+17t=-7 \\ \underline{9s+12t=-6} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 12s+17t=-7 \\ \underline{3[\![1]\!]-4[\![2]\!]} & \underline{3t=3} \end{array} \qquad t=1$$

Dopočítáme s: $9s+12\cdot 1=-6$. $9s=-18\Rightarrow s=-2$

$P[-2+3t;-2t;1+2t] \Rightarrow P[-2+3\cdot 1;-2\cdot 1;1+2] \Rightarrow P[1;-2;3]$

$Q[-1-2s;2+s;-2-2s] \Rightarrow Q[-1-2(-2);2+(-2);-2-2(-2)] \Rightarrow Q[3;0;2]$

$|PQ|=\sqrt{(3-1)^2+(0-[-2])^2+(2-3)^2}=\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=3$

Jiná možnost, jak najít body P a Q.

Směr příčky: $\begin{array}{l}\boldsymbol{u}=(3;-2;2)3;-2 \\ \boldsymbol{v}=(-2;1;-2)-2;1\end{array} \Rightarrow \boldsymbol{w}=(4-2;-4+6;3-4)=(2;2;-1)$

rovina, ve které leží příčka.

$\begin{array}{l}\boldsymbol{u}=(3;-2;2)3;-2 \\ \boldsymbol{w}=(2;2;-1)2;2\end{array} \Rightarrow \boldsymbol{n}=(2-4;4+3;6+4)=(-2;7;10)$

Rovnice roviny: $-2x+7y+10z+d=0$ $A[-2;0;1]$: $-2(-2)+7\cdot 0+10\cdot 1+d=0\Rightarrow d=-14$

Rovina obsahující příčku: $-2x+7y+10z-14=0$

Hledáme **průsečík roviny s přímkou q (bod Q)**:

$-2(-1-2s)+7(2+s)+10(-2-2s)-14=0$

$2+4s+14+7s-20-20s-14=0$ $-18=9s$ $s=-2$

$Q[-1-2s;2+s;-2-2s] \Rightarrow Q[-1-2(-2);2+(-2);-2-2(-2)] \Rightarrow Q[3;0;2]$

průsečík příčky s přímkou p: p: $\begin{array}{l}x=-2+3t \\ y=-2t \\ z=1+2t, t\in R\end{array}$ r: $\begin{array}{l}x=3+2s \\ y=2s \\ z=2-s, s\in R\end{array}$

$$\begin{array}{l}-2+3t=3+2s \\ -2t=2s \\ \underline{1+2t=2-s}\end{array}$$

$\Rightarrow$ Z druhé rovnice $s=-t$ dosadíme do zbývajících dvou.

$$\begin{array}{l} -2+3t=3+2(-t) \\ 1+2t=2-(-t) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t=1 \\ t=1 \end{array} \; P[-2+3t;-2t;1+2t] \Rightarrow P[-2+3\cdot 1;-2\cdot 1;1+2] \Rightarrow P[1;-2;3]$$

Př. 2: Na přímce $q:\{[-1+s;-8+3s;5-2s], s\in R\}$ najdi bod Q, který je od přímky $p:\{[3t;4+2t;-3-2t], t\in R\}$ vzdálen 6. Kolik řešení může mít tento příklad?

Množina bodů, které mají od přímky p vzdálenost 6 tvoří plášť válce, který má v přímce p osu a jehož poloměr je 6. Přímka q se s ním může protnout v žádném, jednom, nebo ve dvou bodech.

$Q[-1+s;-8+3s;5-2s]$

Bodem Q vedeme rovinu ρ kolmou na přímku p: $\boldsymbol{u}_p=(3;2;-2)=\boldsymbol{n}_\rho$

Rovnice roviny: $3x+2y-2z+d=0$. Q: $3(-1+s)+2(-8+3s)-2(5-2s)+d=0$

$d=29-13s$ Rovina $\rho: 3x+2y-2z+29-13s=0$

Hledáme bod P = průsečík roviny ρ s přímkou $p:\{[3t;4+2t;-3-2t], t\in R\}$:

$3(3t)+2(4+2t)-2(-3-2t)+29-13s=0$

$9t+8+4t+6+2t+29-13s=0$ $\quad 17t+43-13s=0$ $\quad t=\dfrac{13s-43}{17}$

$P\left[\dfrac{39s-129}{17};\dfrac{26s-18}{17};\dfrac{35-26s}{17}\right]$ $\quad Q-P=\left(\dfrac{112-22s}{17};\dfrac{25s-118}{17};\dfrac{50-8s}{17}\right)$

Velikost vektoru $Q-P$ je vzdáleností bodu Q od přímky p (kterou známe) $\Rightarrow$ dosadíme a určíme hodnotu parametru s:

$$|Q-P|=\sqrt{\left(\frac{112-22s}{17}\right)^2+\left(\frac{25s-118}{17}\right)^2+\left(\frac{50-8s}{17}\right)^2}=6 \quad /^2$$

$$\left(\frac{112-22s}{17}\right)^2+\left(\frac{25s-118}{17}\right)^2+\left(\frac{50-8s}{17}\right)^2=36 \quad /\cdot 17^2$$

$$(112-22s)^2+(25s-118)^2+(50-8s)^2=10404$$

$$1173s^2-11628s+18564=0 \quad /:(3\cdot 17) \qquad 23s^2-228s+364=0$$

$$s_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-228)\pm\sqrt{(-228)^2-4\cdot 23\cdot 364}}{2\cdot 23}=\frac{228\pm 136}{46}$$

$$s_1=\frac{228+136}{46}=\frac{182}{23} \qquad s_2=\frac{228-136}{46}=2$$

Dopočítáme body $Q[-1+s;-8+3s;5-2s]$:

$$Q_1\left[-1+\frac{182}{23};-8+3\cdot\frac{182}{23};5-2\cdot\frac{182}{23}\right]\Rightarrow Q_1\left[\frac{160}{23};\frac{362}{23};-\frac{249}{23}\right]$$

$$Q_2[-1+2;-8+3\cdot 2;5-2\cdot 2] \Rightarrow Q_2[1;-2;1]$$

Př. 3: Petáková:
strana 120/cvičení 73 b)
strana 121/cvičení 77
strana 122/cvičení 90
strana 122/cvičení 94